Neparametrické metody

© EuroMISE Centrum

Obecné informace

Kontakt:

EuroMISE centrum
Doc. Zdeněk Valenta, Ph.D.
Tel.: 266 053 640 (sekretariát)
Fax: 286 581 453
http://www.euromise.cz
valenta@euromise.cz

Literatura:

Zvárová, J.: *Základy statistiky pro biomedicínské obory I. Vydavatelství Karolinum, UK Praha 2001*

Zvára, K.: *Biostatistika. Vydavatelství Karolinum, UK Praha 2001*

Rosner, B.: *Fundamentals of Biostatistics, 4th Edition*

I. ÚVOD

- Neparametrické testy jsou založeny na *pořadových skórech*, které reprezentují původní data
- Data nemusí nutně splňovat určité předpoklady vyžadované u parametrických testů (např. *normalita rozdílů* v párovém *t*-testu)
- Neparametrické metody mohou zahrnovat požadavky na určité vlastnosti rozdělení (např. *symetrie* nebo *spojitost*)
- Jsou mnohdy jedinou alternativou analýzy *ordinálních* dat nebo dat ve formě *četností* či *pořadí*

ÚVOD (pokr.)

- TŘÍDY NEPARAMETRICKÝCH TESTŮ:
  - JEDNOVÝBĚROVÉ: Kvantilový test
  - DVOUVÝBĚROVÉ PÁROVÉ: Znaménkový test, Wilcoxonův párový test (signed-rank test). Oba testy jsou neparametrickou alternativou párového *t*-testu.
  - DVOUVÝBĚROVÉ PRO NEZÁVISLÉ VÝBĚRY: Mediánový test, Wilcoxonův dvouvýběrový test (Mannův-Whitneyův U test, Wilcoxon Rank-Sum test), Robustní dvouvýběrový test, Kolmogorovův-Smirnovův dvouvýběrový test, případně Waldův-Wolfowitzův „runs test“. Tyto testy jsou neparametrickou alternativou dvouvýběrového *t*-testu.
  - VÍCEVÝBĚROVÉ: Kruskalova-Wallisova analýza pořadových skórů jednoduchého třídění, Friedmanova analýza pořadových skórů opakovaných měření v jednoduchém třídění. Tyto analýzy odpovídají analýze rozptylu (ANOVA - analysis of variance, MANOVA - multivariate ANOVA) jednoduchého třídění.

ÚVOD (pokr.)

- Výše uvedené testy jsou analogií známých parametrických testů, tj. jednovýběrového *t*-testu, dvouvýběrového *t*-testu pro nezávislé výběry a analýzy rozptylu
- Neparametrické testy nemusí vyžadovat splnění všech požadavků známých z parametrických metod, jakými jsou například normalita rozdělení, případně ani shodnost rozptylů u dvouvýběrových testů (např. robustní dvouvýběrový test)
- V případě, že jsou ovšem požadavky na použití parametrických metod splněny, je vhodné je upřednostnit před metodami neparametrickými, neboť testy založené na parametrických metodách mají zpravidla větší sílu (využívají více informace)

II. USPOŘÁDÁNÍ A POŘADÍ

- Pozorovaná data:
  -3, 3, 4, 1, 0, 10, 8, 2
- Vzestupně uspořádaná data:
  -3, 0, 1, 2, 3, 4, 8, 10
- Pořadí R_i pozorovaných dat (Ranks R_i):
  1, 5, 6, 3, 2, 8, 7, 4

POŘADÍ SHODNÝCH POZOROVÁNÍ (ties)

- V případě shodných pozorování (ties) přiřazujeme tzv. průměrná pořadí (average ranks).
- Vzestupně uspořádaná data a jejich průměrná pořadí:

Uspořádaná Data	-3	0	1	1	2	3	3	3	4	8	10	10
Průměrná pořadí	1	2	3,5	3,5	5	7	7	7	9	10	11,5	11,5

III. VÝBĚROVÉ KVANTILY SPOJITÝCH ROZDĚLENÍ

- Vzestupně uspořádaná data:

-3, 0, 1, 2, 3, 4, 8, 10

- Výběrové kvantily:

-3 …. 0% kvantil (min)
0 …. 1/7 = 14,3% kvantil
1 …. 2/7 = 28,6% kvantil
…. ….
4 …. 5/7 = 71,5% kvantil
10 …. 100% kvantil (max)

ODHADY KVANTILŮ SPOJITÝCH ROZDĚLENÍ

- Vzestupně uspořádaná data:

-3, 0, 1, 2, 3, 4, 8, 10

- Odhady kvantilů (lineární interpolace):

0% kvantil (min) = - 3,00
10% kvantil = -3 + (0- -3)*(10/14.3) = - 0,90
25% (1.kvartil, Q1) = 0 + (1-0)*(10.7/14.3) = 0,75
50% (medián): = 2,50
75% (3. kvartil, Q3) = 5,00
90% kvantil = 8,60
100% kvantil (max) = 10,00

IV. KVANTILOVÝ TEST (1-výběrový)

- Nulová hypotéza: H_0: $x_q = c$
  (H_0:100*q% kvantil x_q cílové populace je roven c)
- Alternativní hypotéza: H_1: $x_q \neq c$
- Hladina významnosti: α (např. 0,05)
- Postup: Z náhodného výběru vyřadíme členy, u kterých je hodnota znaku *x* rovna konstantě *c.* Ve výsledném souboru o rozsahu *n* pak zjistíme počet členů *m,* u kterých je *x* < *c.*
- Testová statistika: $Z = \frac{m - nq}{\sqrt{nq(1-q)}} \sim N(0,1)$

  má za platnosti H_0 standardní normální rozdělení N(0,1).
- Testové kritérium: Zamítáme H_0, jestliže $|Z| \geq z_{1-\alpha/2}$
- Předpoklady: n > 35, 0,10 < q < 0,90 a spojitost rozdělení (aprox. binomického rozdělení normálním rozdělením N(0,1))

KVANTILOVÝ TEST – příklad:

- ZADÁNÍ: Na základě dat o intervenční léčbě 400 pacientů se závažnou formou hyperlipoproteinemie (sérum CHOL 10 mmol/l a více) testujte na hladině významnosti *α* = 0,05 hypotézu, že u alespoň 20% pacientů s touto závažnou formou hyperlipoproteinémie docílí intervenční léčba poklesu hladiny CHOL v séru většího než 3 mmol/l.
- H_0: $(y - x)_{0.80} = d_{0.80} = 3$ (léčba nedosahuje stanoveného poklesu u alespoň 20% pacientů)
- H_1: $d_{0.80} > 3$ (pokles u alespoň 20% pacientů)
- HLADINA VÝZNAMNOSTI: α = 0,05

KVANTILOVÝ TEST – pokr. př.:

- ŘEŠENÍ: Předpokládejme, že data ukazují, že ve 100 případech ze 400 byla hodnota d > 3 a ani v jednom případě nebylo d = 3.

  Tedy: n = 400 (počet případů kde d ≠ 3)
  m = 100 (počet případů kde d > 3)
  q = 0,20.
- TESTOVÁ STATISTIKA: $Z = \frac{m - nq}{\sqrt{nq(1-q)}} = \frac{100 - 400 * 0,2}{\sqrt{400 * 0,2 * 0,8}} = 2,5$
- VÝSLEDEK: Kritická hodnota normálního rozdělení pro jednostranný test na hladině významnosti *α* = 5% má hodnotu 1,645. Protože hodnota testové statistiky Z = 2,5 přesahuje kritickou hodnotu, zamítáme nulovou hypotézu H_0 na hladině významnosti 5%.
- ZÁVĚR: Na hladině α = 0,05 zamítáme nulovou hypotézu H_0, že intervenční léčba nedosahuje stanoveného poklesu hladiny CHOL o více než 3 mmol/l u alespoň 20% pacientů.

V. ZNAMÉNKOVÝ TEST (párový)

- NULOVÁ HYPOTÉZA: H_0: $(x – y)_{0,5} = d_{0,5} = 0$
  (H_0: Medián párových rozdílů $d_{0,5}$ je roven 0)
- ALTERNATIVNÍ HYPOTÉZA: H_1: $d_{0,5} \neq 0$
- HLADINA VÝZNAMNOSTI: α (např. 0,05)
- POZNÁMKA: Znaménkový test je speciálním případem kvantilového testu pro medián (tj. *q* = 0,5) aplikovaného na párové rozdíly hodnot mezi dvěma výběry.
- POSTUP: Ze základního souboru párových rozdílů vyřadíme členy, u kterých je hodnota znaku *d = x - y* rovna *0.* Ve výsledném souboru o rozsahu *n* (počet párů) pak zjistíme počet členů *C,* u kterých je *d > 0.*

V. ZNAMÉNKOVÝ TEST (párový, pokr.)

- TEST H_0 (aproximace binomického rozdělení normálním):

  Zamítneme H_0, jestliže:

  $C > \frac{n}{2} + \frac{1}{2} + z_{1-a/2}\sqrt{\frac{n}{4}}$ nebo $C < \frac{n}{2} - \frac{1}{2} - z_{1-a/2}\sqrt{\frac{n}{4}}$

- PŘEDPOKLADY: Počet dvojic n ≥ 20 a spojitost rozdělení
- TEST H_0 (exaktní stanovení hladiny významnosti *p* na základě binomického rozdělení):

  $$\text{(a) Je - li } C > \frac{n}{2} \rightarrow p = 2 * \sum_{j=C}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

  $$\text{(b) Je - li } C < \frac{n}{2} \rightarrow p = 2 * \sum_{j=0}^{C} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ZNAMÉNKOVÝ TEST – příklad

- DERMATOLOGIE:

  Byla realizována studie zaměřená na porovnání účinnosti pleťových krémů typu A, B a C s ochranným faktorem proti negativním účinkům slunečního záření při dlouhodobé expozici. Krémy byly aplikovány účastníkům studie na odpovídající místa s podobnou kvalitou pokožky na levé a pravé části těla a každý z účastníků byl následně vystaven intenzivnímu slunečnímu záření po dobu 1 hod. Poté bylo dermatologem porovnáno zrudnutí pokožky na ošetřených místech.

ZNAMÉNKOVÝ TEST – příklad

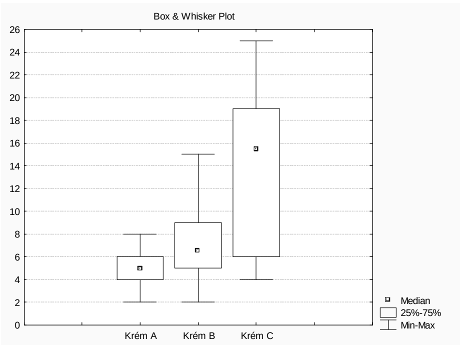
- Organizace dat:

	1 Krém A	2 Krém B	3 Krém C
1	5	6	15
2	6	8	16
3	4	4	4
4	5	7	8
5	5	9	6
6	4	6	22
7	8	12	25
8	8	15	16
9	2	5	19
10	3	2	6

Původní data hodnotila zrudnutí pokožky koeficientem 0 až 25.

ZNAMÉNKOVÝ TEST – příklad

- DATA: Box & Whisker Plot



ZNAMÉNKOVÝ TEST (pokr. př.)

- Soustřeďme se nyní pouze na porovnání účinnosti jednotlivých dvojic krémů typu A, B a C. Navíc předpokládejme, že dermatolog byl schopen rozlišit pouze následující případy (zde porovnáváme např. krémy typu A a B):

  1. Místo A je lépe ochráněné než místo B (menší zrudnutí při aplikaci krému A)
  2. Místo B je lépe ochráněné než místo A (menší zrudnutí při aplikaci krému B)
  3. Obě místa vykazují podobný stupeň zrudnutí pokožky

- Tato situace je vhodná pro využití znaménkového testu, neboť původní hodnoty koeficientů zrudnutí pokožky v tomto případě nejsou dostupné, pouze počty případů, kdy pro $d = x - y$ platí: $d < 0$, $d = 0$ a $d > 0$.

ZNAMÉNKOVÝ TEST (pokr. př.)

STATISTICA 6.0:

Pair of Variables	Sign Test (sign-test-small.sta) Marked tests are significant at p <,05000 No. of Non-ties	Percent v < V	Z	p-level
Krém A & Krém C	9	100,0000	2,666667	0,007661

Pair of Variables	Sign Test (sign-test-small.sta) Marked tests are significant at p <,05000 No. of Non-ties	Percent v < V	Z	p-level
Krém A & Krém B	9	88,88889	2,000000	0,045500

Pair of Variables	Sign Test (sign-test-small.sta) Marked tests are significant at p <,05000 No. of Non-ties	Percent v < V	Z	p-level
Krém B & Krém C	9	88,88889	2,000000	0,045500

ZNAMÉNKOVÝ TEST (pokr. př.)

- Rozsah náhodného výběru byl však v každé skupině (tj, pro každý typ ochranného krému) pouze 10, což nesplňuje požadavek na aproximaci binomického rozdělení standardním normálním rozdělením. V takovém případě je nutné použít exaktní test – binomický test.
- Buď C_{AB} počet subjektů, u nichž je $d = x – y > 0$ při porovnávání účinku krémů A a B. Je-li C_{AB} velké číslo blízké n, pak krém B chrání pokožku většiny studovaných subjektů lépe než krém A, zatímco je-li C_{AB} malé, pak krém typu A vykazuje na souboru studovaných subjektů lepší výsledky než krém typu B.

ZNAMÉNKOVÝ TEST (pokr. př.)

- Za platnosti nulové hypotézy H_0 (tj. předpokladu stejné efektivity krémů A a B) lze předpokládat, že $Pr(d > 0) = Pr(d < 0)$ je u subjektů s nenulovou hodnotou d stejná, tedy ½. Jinými slovy, jsou-li oba krémy stejně efektivní, potom frekvence případů, kdy A je „lepší" než B a případů, kdy A je „horší" než B by měly být zhruba stejné.
- Ke stanovení DOSAŽENÉ HLADINY VÝZNAMNOSTI *p* znaménkového testu tedy můžeme využít přímo formule binomického rozdělení:

$$p = 2 * \sum_{j=C_{AB}}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ZNAMÉNKOVÝ TEST (dokončení)

- **v** EXAKTNÍ ZNAMÉNKOVÝ TEST:

  Připoměňme si, že při porovnávání účinnosti krému A a B jsme měli 10 pozorování, 1 shodu („tie“), $C_{AB} = 1$, $n = 9$. Pro exaktní výpočet dosažené hladiny významnosti oboustraného testu tedy platí:

$$p = 2 * \sum_{j=0}^{1} \binom{9}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{9} = 2*(1+9)*\left(\frac{1}{2}\right)^{9} = 10*\left(\frac{1}{2}\right)^{8} = 0{,}03906$$

- **v** ZÁVĚR:

  Na hladině významnosti α = 5% zamítáme nulovou hypotézu H_0 o shodnosti účinku ochranných krémů typu A a B.

VI. WILCOXONŮV PÁROVÝ TEST (signed-rank test)

- **v** NULOVÁ HYPOTÉZA: H_0: $(x - y)_{0,5} = d_{0,5} = 0$
  (H_0: Medián párových rozdílů $d_{0,5} = 0$)
- **v** ALTERNATIVNÍ HYPOTÉZA: H_1: $d_{0,5} \neq 0$
- **v** HLADINA VÝZNAMNOSTI: α (např. 0,05)
- **v** POSTUP: Z náhodného výběru s počtem párových pozorování n vyřadíme členy, u nichž je hodnota znaku d = x - y rovna 0. Stanovíme pořadí hodnot |d| a zjistíme součet pořadí T^+, která odpovídají kladným hodnotám d.

VI. WILCOXONŮV PÁROVÝ TEST (signed-rank test, pokr.)

- **v** TESTOVÁ STATISTIKA: $Z = \frac{T^+ - n(n+1)/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}} \sim N(0,1)$

  má za platnosti H_0 standardní normální rozdělení
- **v** POZNÁMKA: Wilcoxonův párový test má větší statistickou sílu než znaménkový test, neboť využívá jak informaci o směru rozdílů, tak o jejich velikosti ve formě pořadí. To se projevuje také v nižším požadovaném minimálním rozsahu náhodného výběru.
- **v** TESTOVÉ KRITÉRIUM: Zamítáme H_0, jestliže $|Z| \geq z_{1-a/2}$
- **v** PŘEDPOKLADY: počet párů n > 15 a spojitost rozdělení

WILCOXONŮV PÁROVÝ TEST - příklad

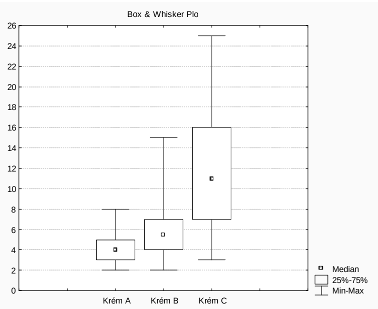
- Pokračujme naším příkladem z dermatologie: připoměňme, že Wilcoxonův *signed-rank test* pracuje s aktuální velikostí rozdílů d = x – y, nikoliv pouze s informací, zda x je větší či menší než y. Můžeme tedy očekávat, že reálně existující rozdíly mezi efektivností krémů bude snazší detekovat na základě Wilcoxonova párového testu než jednoduššího testu znaménkového.

WILCOXONŮV PÁROVÝ TEST - příklad

- Organizace dat:

	1 Krém A	2 Krém B	3 Krém C
1	5	6	15
2	6	8	16
3	4	4	4
4	5	7	8
5	5	9	6
6	4	6	22
7	8	12	25
8	8	15	16
9	2	5	19
10	3	2	6
11	2	3	13
12	3	4	10
13	5	5	5
14	3	4	8
15	6	7	8
16	4	6	15
17	2	6	9
18	3	4	12
19	4	3	3
20	4	5	20

- Box and Whisker plot:



WILCOXONŮV PÁROVÝ TEST – (pokr. př.):

Krém A vs B:

Pair of Variables	Wilcoxon Matched Pairs Test (sign-test.sta) Marked tests are significant at p <,05000			
	Valid N	T	Z	p-level
Kr ém A & Krém B	20	10,00000	3,288052	0,001009

Srovnej:

Pair of Variables	Sign Test (sign-test.sta) Marked tests are significant at p <,05000			
	No. of Non-ties	Percent v < V	Z	p-level
Krém A & Krém B	18	88,88889	3,064129	0,002183

WILCOXONŮV PÁROVÝ TEST – (pokr. př.):

Krém A vs C:

Pair of Variables	Wilcoxon Matched Pairs Test (sign-test.sta) Marked tests are significant at p <,05000			
	Valid N	T	Z	p-level
Kr ém A & Krém C	20	1,500000	3,658230	0,000254

Srovnej:

Pair of Variables	Sign Test (sign-test.sta) Marked tests are significant at p <,05000			
	No. of Non-ties	Percent v < V	Z	p-level
Krém A & Krém C	18	94,44444	3,535534	0,000407

WILCOXONŮV PÁROVÝ TEST – (pokr. př.):

Krém B vs C:

Pair of Variables	Wilcoxon Matched Pairs Test (sign-test.sta Marked tests are significant at p <,05000			
	Valid N	T	Z	p-level
Krém B & Krém C	20	4,500000	3,408344	0,000654

Srovnej:

Pair of Variables	Sign Test (sign-test.sta) Marked tests are significant at p <,05000			
	No. of Non-ties	Percent v < V	Z	p-level
Krém B & Krém C	17	94,11765	3,395499	0,000685

VII. MEDIÁNOVÝ TEST (dvouvýběrový)

- NULOVÁ HYPOTÉZA: H_0: $\Theta_X = \Theta_Y$ (H_0: Mediány Θ_X a Θ_Y jsou shodné)
- ALTERNATIVNÍ HYPOTÉZA: H_1: $\Theta_X > \Theta_Y$ (medián Θ_X je napravo od Θ_Y)
- HLADINA VÝZNAMNOSTI: α (např. 0,05)
- POSTUP: Klasifikace hodnot v obou souborech podle společného mediánu Θ_{XY}:

Klasifikace	Soubor X	Soubor Y	Celkem
Počet hodnot > Θ_{XY}	a	b	a+b
Počet hodnot < Θ_{XY}	c	d	c+d
Celkem	a+c	b+d	n

MEDIÁNOVÝ TEST (dvouvýběrový, pokr.)

- VARIANTY TESTU:
  - exaktní na základě hypergeometrického rozdělení: (Fisherův test, n≤20)

$$P[a,b]=\frac{\binom{a+c}{a}\binom{b+d}{b}}{\binom{n}{a+b}}$$

  - Chí-kvadrát aproximace (n>20):

$$X^2(1)=\frac{n(|ad-bc|-n/2)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$$

- PŘEDPOKLADY: spojitost a shodný tvar rozdělení X a Y.

VIII. WILCOXONŮV DVOUVÝBĚROVÝ TEST (Mann-Whitney U test, Rank-Sum test)

- NULOVÁ HYPOTÉZA: H_0: Dva nezávislé výběry pocházejí z populací se shodnými mediány ($\Theta_X = \Theta_Y$)
- ALTERNATIVNÍ HYPOTÉZA: H_1: Populace X je „napravo“ od Y (medián $\Theta_X > \Theta_Y$)
- HLADINA VÝZNAMNOSTI: α (např. 0,05)
- POSTUP: Stanovíme pořadí hodnot v souboru vzniklém spojením výběrů X a Y a zjistíme součty pořadí W_X a W_Y („ranked sums“) odpovídající výběrům X, Y. Za platnosti H_0 by statistiky W_X a W_y měly mít přibližně stejnou hodnotu.

WILCOXONŮV DVOUVÝBĚROVÝ TEST (pokr.)

- TESTOVÁ STATISTIKA:

$$Z=\frac{W_X+0.5-m(m+n+1)/2}{\sqrt{mn(m+n+1)/12}}\sim N(0,1)$$

  má za platnosti H_0 standardní normální rozdělení N(0,1), přičemž m a n jsou rozsahy jednotlivých výběrů.

- POZNÁMKA: V případě, že H_1 má tvar $\Theta_X < \Theta_Y$ má hodnota 0,5 v čitateli záporné znaménko. Wilcoxonův dvouvýběrový test má větší statistickou sílu než mediánový test, neboť využívá jak informaci o poloze skórů vůči společnému mediánu, tak také součty pořadí.

WILCOXONŮV DVOUVÝBĚROVÝ TEST (dok.)

- TESTOVÉ KRITÉIUM: Zamítáme H_0, jestliže $Z \geq z_{1-\alpha}$
- PŘEDPOKLADY: m > 10, n > 10 a spojitost a shodný tvar rozdělení v obou populacích

WILCOXONŮV DVOUVÝBĚROVÝ TEST - příklad

- Pokračujme opět naším příkladem z dermatologie; pouze nyní předpokládejme, že data nevznikla párovým porovnáváním na týchž subjektech, nýbrž že každému z účastníků studie byl aplikován právě jediný z ochranných krémů typu A, B, C.
- Z tohoto důvodu budou mít data namísto 20 záznamů (records) se třemi proměnnými A, B, C mít záznamů 60 a pouze dvě proměnné, přičemž první proměnná udává hodnotu zjištěného koeficientu a druhá je indikátorem, udávajícím typ použitého krému u daného subjektu.

WILCOXONŮV DVOUVÝBĚROVÝ TEST - příklad

- Organizace dat v programu *Statistica 6* v tomto případě vypadá následovně:

	1 Krém	2 Group
1	5	1
2	6	1
3	4	1
4	5	1
5	5	1
6	4	1
7	8	1
8	8	1
9	2	1
10	3	1
11	2	1
12	3	1
13	5	1
14	3	1
15	6	1
16	4	1
17	2	1
18	3	1
19	4	1
20	4	1
21	6	2
22	8	2
23	4	2
24	7	2
25	9	2
26	6	2
27	12	2
28	15	2
29	5	2
30	2	2
31	3	2

WILCOXONŮV DVOUVÝBĚROVÝ TEST - pokr. př.

Mann-Whitney U Test (Wilcoxon Rank Sum Test.sta)
By variable Group
Marked tests are significant at p <,05000

variable	Rank Sum Group 1	Rank Sum Group 2	U	Z	p-level	Z adjusted	p-level	Valid N Group 1	Valid N Group 2	2*1sided exact p
Krém	335,5000	484,5000	125,5000	-2,01523	0,043881	-2,04036	0,041315	20	20	0,04298

DALŠÍ DVOUVÝBĚROVÉ TESTY:

- KOLMOGOROVŮV-SMIRNOVŮV test:

Kolmogorov-Smirnov Test (Wilcoxon Rank Sum Test.sta)
By variable Group
Marked tests are significant at p <,05000

variable	Max Neg Differnc	Max Pos Differnc	p-level	Mean Group 1	Mean Group 2	Std.Dev. Group 1	Std.Dev. Group 2	Valid N Group 1	Valid N Group 2
Kr ém	-0,300000	0,00	p > .10	4,300000	6,050000	1,750188	3,119970	20	20

- WALDŮV-WOLFOWITZŮV „runs test“

Wald-Wolfowitz Runs Test (Wilcoxon Rank Sum Test.sta)
By variable Group
Marked tests are significant at p <,05000

Variable	Valid N Group 1	Valid N Group 2	Mean Group 1	Mean Group 2	Z	p-level	Z adjstd	p-level	No. of Runs	No. of ties
Krém	20	20	4,300000	6,050000	0,961085	0,336510	0,800904	0,423188	24	17

Poznámky k dvouvýběrovým testům:

- Ukázka výpočtu „runs“ ve WALDOVĚ-WOLFOWITZOVĚ testu na příkladě:

pořadí 1 2 3 31
data MMMZZZMMMMZZMMMZZZZZZZMMZMMZZZZ
run 111 222 3333 44 555 6666666 77 8 99 0000

Poznámky k dvouvýběrovým testům:

- WILCOXONŮV DVOUVÝBĚROVÝ TEST (Mannův-Whitneyův U-test, Wilcoxonův Rank-Sum test) má největší statistickou sílu z uvedených testů a je vhodný zejména v případě, že počet „ties“ (shodných pozorování) je malý. Je vhodný zejména v situacích, kdy se průměrné hodnoty pořadí v jednotlivých skupinách (např. muži a ženy) podstatně liší.
- WALDŮV-WOLFOWITZŮV „RUNS TEST“ má menší statistickou sílu, ale je vhodný v případě, že průměrné hodnoty pořadí se ve skupinách (muži a ženy) zásadně neliší, ale například u mužů nabývají buď vysokých nebo naopak nízkých hodnot, zatímco u žen nabývají středních hodnot.
- KOLMOGOROVŮV-SMIRNOVŮV test je vhodný v případě, že počet shodných pozorování („ties“) je vyšší.

IX. KRUSKALOVA-WALLISOVA ANOVA

- Nulová hypotéza: H_0: *k* nezávislých výběrů pochází z populací se shodnými mediány ($\Theta_1 = \Theta_2 = ... = \Theta_k$)
- Alternativní hypotéza: H_1: Mediány se alespoň ve dvou populacích vzájemně liší
- Hladina významnosti: α (např. 0,05)
- Postup:
  1. Do tabulky o *k* sloupcích, ve které *j*-tý sloupec odpovídá výběru z *j*-té populace (*j*=1,...,*k*), zapíšeme namísto pozorovaných hodnot pořadí, která odpovídají pozorovaným hodnotám v souboru vzniklém spojením *k* podsouborů.
  2. V každé z *k* skupin spočteme průměrné pořadí $\overline{R}_j$, (j=1,...,k)

KRUSKALOVA-WALLISOVA ANOVA (pokr.)

- Testová statistika: $KW = \left[\frac{12}{N(N+1)}\sum_{j=1}^{k} n_j \overline{R}_j^2\right] - 3(N+1)$

  má za platnosti H_0 rozdělení c^2_{k-1}
- Testové kritérium: Zamítáme H_0, jestliže $KW > c^2_{k-1}(1-a)$
- Předpoklady:
  - Rozsahy výběru n_j (j=1,...,k) musí být v jednotlivých skupinách alespoň 5
  - Spojitost
  - Shodný tvar rozdělení v jednotlivých populacích.

KRUSKALOVA-WALLISOVA analýza – příklad:

Opthalmologie:

- Kyselina arachodinová je známá tím, že ovlivňuje metabolismus oka. Kontakt oka s malým množstvím této kyseliny má za následek zavření víčka, svědění a v některých případech poruchy vidění. Studie, z níž pocházejí data pro náš příklad, porovnávala protizánětlivé účinky 4 zkoumaných látek, které byly aplikovány laboratorním zvířatům (bílí králíci) do jednoho oka a roztok salina do druhého oka.
- Po 10 minutách bylo králíkům aplikováno malé množství kyseliny arachodinové na obě bulvy. Po dalších 15 minutách byli králíci kontrolováni, zda došlo k uzavření víčka a bylo zaznamenáno skóre, které představovalo hodnotu rozdílu mezi stupněm otevření víčka (0-otevřené, 1-2 polouzavřené a 3 uzavřené) na začátku pokusu a po aplikaci kyseliny arachodinové.

KRUSKALOVA-WALLISOVA analýza – pokr. př.:

Opthalmologie:

- Data pro statistickou analýzu udávají míru efektivnosti protizánětlivého přípravku a jsou dána rozdíly mezi hodnotou skóre na oku ošetřeném aktivní látkou a oku ošetřeném salinou (neutrální izotonický 0,9% roztok soli).
- Vyšší hodnoty skórů (rozdíly rozdílů) naznačují efektivnější účinek protizánětlivé látky.

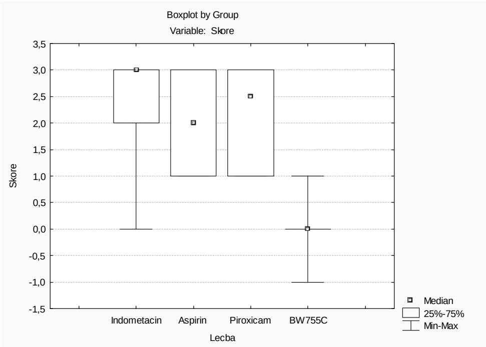
KRUSKALOVA-WALLISOVA analýza – pokr. př.

- Opthalmologie - data:

	1 Sk ore	2 Lecba
1	2	Indometacin
2	3	Indometacin
3	3	Indometacin
4	3	Indometacin
5	3	Indometacin
6	0	Indometacin
7	1	Aspirin
8	3	Aspirin
9	1	Aspirin
10	2	Aspirin
11	2	Aspirin
12	3	Aspirin
13	3	Piroxicam
14	1	Piroxicam
15	2	Piroxicam
16	1	Piroxicam
17	3	Piroxicam
18	3	Piroxicam
19	1	BW755C
20	0	BW755C
21	0	BW755C
22	0	BW755C
23	0	BW755C
24	-1	BW755C

KRUSKALOVA-WALLISOVA analýza – pokr. př.

- Box & Whisker Plot:



KRUSKALOVA-WALLISOVA analýza – pokr. př.

- K-W analýza pořadových skórů:

Depend.: Sk ore	Kruskal-Wallis ANOVA by Ranks; Independent (grouping) variable: Lecba Kruskal-Wallis test: H (3, N= 24) =11,80415 p =,0081		
	Code	Valid N	Sum of Ranks
Indometacin	101	6	97,50000
Aspirin	102	6	85,00000
Piroxicam	103	6	91,50000
BW755C	104	6	26,00000

- Mediánový test:

Dependent: Sk ore	Median Test, Overall Median = 2,00000; Sk ore (Kruskal-Wallis O Independent (grouping) variable: Lecba Chi-Square = 6,222222, df = 3, p = ,1013				
	Indometacin	Aspirin	Piroxicam	BW755C	Total
<= Median: observed	2,00000	4,000000	3,000000	6,00000	15,00000
expected	3,75000	3,750000	3,750000	3,75000	
obs.-exp.	-1,75000	0,250000	-0,750000	2,25000	
> Median: observed	4,00000	2,000000	3,000000	0,00000	9,00000
expected	2,25000	2,250000	2,250000	2,25000	
obs.-exp.	1,75000	-0,250000	0,750000	-2,25000	
Total: observed	6,00000	6,000000	6,000000	6,00000	24,00000

X. ROBUSTNÍ DVOUVÝBĚROVÝ TEST

- NULOVÁ HYPOTÉZA: H_0: Dva nezávislé výběry pocházejí z populací se shodnými mediány ($\Theta_X = \Theta_Y$)
- ALTERNATIVNÍ HYPOTÉZA: H_1: Medián $\Theta_X > \Theta_Y$
- HLADINA VÝZNAMNOSTI: α (např. 0,05)
- POSTUP (na příkladě):

1. Vzestupně uspořádejme pozorovaná data a označme příslušnost ke skupinám X a Y:

Data	6	8	9	10	11	13	15
Skupina	Y	Y	X	Y	X	Y	X

ROBUSTNÍ DVOUVÝBĚROVÝ TEST (pokr.)

Data	6	8	9	10	11	13	15
Skupina	Y	Y	X	Y	X	Y	X

2. Definujeme: $U(YX_i)$ – počet Y menších než X_i
$U(XY_j)$ – počet X menších než Y_j

X_i	9	11	15	Y_j	6	8	10	13
$U(YX_i)$	2	3	4	$U(XY_j)$	0	0	1	2

3. Vypočteme střední hodnoty U(YX) a U(XY):

$$U(YX) = \sum_{i=1}^{m} \frac{U(YX_i)}{m} = \frac{(2+3+4)}{3} = 3$$

$$U(XY) = \sum_{i=1}^{n} \frac{U(XY_i)}{n} = \frac{(0+0+1+2)}{4} = 0{,}75$$

ROBUSTNÍ DVOUVÝBĚROVÝ TEST - pokr.

X_i	9	11	15	Y_j	6	8	10	13
$U(YX_i)$	2	3	4	$U(XY_j)$	0	0	1	2

Střední hodnoty: U(YX) = 3 U(XY) = 0,75.

4. Vypočteme ukazatele variability V_X a V_Y :

$$V_X = \sum_{i=1}^{m} [U(YX_i) - U(YX)]^2 =$$
$$= (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2$$
$$= 1 + 0 + 1 = 2$$

$$V_Y = \sum_{j=1}^{n} [U(XY_j) - U(XY)]^2 =$$
$$= (0-0{,}75)^2 + (0-0{,}75)^2$$
$$+ (1-0{,}75)^2 + (2-0{,}75)^2 = 2{,}75$$

ROBUSTNÍ DVOUVÝBĚROVÝ TEST - pokr.

- **v** Střední hodnoty: U(YX) = 3 U(XY) = 0,75.
- **v** Ukazatele variability: $V_X = 2$ $V_Y = 2{,}75$.

5. TESTOVÁ STATISTIKA U má za platnosti H_0 rozdělení N(0,1):

$$U = \frac{mU(YX) - nU(XY)}{2\sqrt{V_X + V_Y + U(XY)U(YX)}} = \frac{3(3) - 4(0{,}75)}{2\sqrt{2 + 2{,}75 + (0{,}75)(3)}} = 1{,}13$$

6. TESTOVÉ KRITÉRIUM: Zamítáme H_0, jestliže platí $U \geq z_{1-\alpha}$.

7. ZÁVĚR: V našem příkladě H_0 nezamítáme.

8. PŘEDPOKLADY: m > 12, n > 12 a spojitost rozdělení (rozptyly se mohou lišit, jde o tzv. Behrensův-Fisherův problém). Pro m,n≤12 je rozdělení U tabelováno.