

# Parametrické testy hypotéz o středních hodnotách spojitých náhodných veličin

© EuroMISE Centrum



---

---

---

---

---

---

---

---

## Obecné informace

Kontakt: EuroMISE centrum  
Doc. Zdeněk Valenta, Ph.D.  
Tel.: 266 053 640 (sekretariát)  
Fax: 286 581 453  
<http://www.euromise.cz>  
[valenta@euromise.cz](mailto:valenta@euromise.cz)

Literatura:  
Zvárová, J.: *Základy statistiky pro biomedicínské obory I.*  
Vydavatelství Karolinum, UK Praha 2001  
Zvára, K.: *Biostatistika.*  
Vydavatelství Karolinum, UK Praha 2001  
Rosner, B.: *Fundamentals of Biostatistics, 4<sup>th</sup> Edition*  
Duxbury Press, International Thomson  
Publishing Company, 1995



---

---

---

---

---

---

---

---

## I. ÚVOD

✓V této přednášce budeme hovořit o  
jednovýběrových a dvouvýběrových testech  
týkajících se střední hodnoty (teoretického  
průměru) spojité náhodné veličiny, jakou je  
například porodní váha novorozenců.

✓Ve všech případech budeme vycházet z  
předpokladu, že sledovaná náhodná  
veličina má normální rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Formalismus Testů Hypotéz

- ✓ Formalismus testů hypotéz začíná vyslovením medicínské hypotézy, která poskytuje věcný základ formulaci statistické nulové hypotézy ( $H_0$ ), zde hypotézy o střední (průměrné) hodnotě sledované náhodné veličiny (tj. parametru  $\mu$ ). Vedle nulové hypotézy je dále třeba zformulovat tzv. alternativní hypotézu ( $H_1$ ), která popisuje, jaká situace nastává v případě neplatnosti  $H_0$ .
- ✓ Dalším krokem je zvolení hladiny pravděpodobnosti chyby 1. druhu, kterou jsme ochotni v našem testu tolerovat. Značíme ji obvykle  $\alpha$  a nazýváme ji také hladinou významnosti testu („*significance level*“ of a test). Jedná se o pravděpodobnost, s jakou zamítneme nulovou hypotézu v  $H_0$  případě, že platí. Obvyklou volbou hladiny významnosti je  $\alpha = 0.05$ , případně 0.01 nebo 0.001.

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Formalismus Testů Hypotéz (pokr.)

- ✓ Dalším krokem je volba testové statistiky. Jedná se o náhodnou veličinu, která je navržena tak, abychom uměli určit její statistické rozdělení, např.  $N(0,1)$ .
- ✓ Hodnocení statistické hypotézy vychází z dosažené hodnoty testové statistiky, kterou porovnáváme s tzv. *kritickou hodnotou* odpovídajícího rozdělení na hladině  $\alpha$ . Překročili-li hodnota testové statistiky kritickou hodnotu, zamítáme  $H_0$  na hladině významnosti  $\alpha$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

## II. Formalismus Testů Hypotéz (pokr.)

- ✓ Ekvivalentně můžeme posoudit výsledek testu na základě tzv. *dosažené hladiny významnosti* (*p-value*,  $p$ ), která udává pravděpodobnost, s jakou bychom za předpokladu platnosti nulové hypotézy mohli obdržet výsledek přinejmenším tak extrémní, jako je výsledek pozorovaný.
- ✓ Má-li dosažená hladina významnosti  $p$  hodnotu nižší než je zvolená hladina významnosti testu  $\alpha$ , pak obdržení výsledek je významný na této hladině významnosti a zamítáme nulovou hypotézu  $H_0$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

### III. Jednovýběrový z-test při známé hodnotě $\sigma$

✓ Řekněme, že máme k dispozici dlouhodobé údaje o porodní váze novorozenců v České republice, na jejichž základě jsme zjistili, že průměrná porodní váha novorozenců v ČR má hodnotu  $\mu_0 = 3.2$  kg a směrodatná odchylka má hodnotu  $\sigma_0 = 0.6$  kg. V tomto případě můžeme předpokládat, že porodní váha novorozenců v ČR se řídí normálním rozdělením, tedy  $N(\mu_0, \sigma_0^2) = N(3.2, 0.36)$ .

✓ Data získaná z místní spádové nemocnice ukazují, že průměrná porodní váha 100 novorozenců zde narozených v průběhu posledních tří let má hodnotu 2.8 kg.

---

---

---

---

---

---

---

---

### III. Jednovýběrový z-test při známé hodnotě $\sigma$

Motivace: našim cílem bude testovat hypotézu, zda je průměrná porodní váha novorozenců narozených v místní spádové nemocnici v průběhu posledních tří let nižší než hodnota dlouhodobého republikového průměru.

✓  $H_0: \mu = \mu_0$ , přičemž  $\sigma = \sigma_0$ .

✓  $H_1: \mu < \mu_0$ , přičemž  $\sigma = \sigma_0$ .

✓ Zvolme hladinu významnosti  $\alpha$

✓ Testová statistika:  $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \sim N(0,1) | H_0$

✓ Testové kritérium: zamítneme nulovou hypotézu na hladině  $\alpha$  v případě, že platí  $z < z_\alpha$ , nebo ekvivalentně v případě, že dosažená hladina významnosti  $p$  jednostranného testu bude menší než  $\alpha$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

### III. Jednovýběrový z-test při známé hodnotě $\sigma$

Provedení testu:

✓  $H_0: \mu = 3.2$ , přičemž  $\sigma = 0.6$ .

✓  $H_1: \mu < 3.2$ , přičemž  $\sigma = 0.6$ .

✓ Hladina významnosti  $\alpha = 5\%$ .

✓ Testová statistika:  $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = \frac{2.8 - 3.2}{0.6 / \sqrt{100}} = -6.667 \sim N(0,1)$

✓ Testové kritérium:  $-6.667 < z_{0.05} = -1.645$

Alternativně, dosažená hladina významnosti má hodnotu  $p = 3.8 \cdot 10^{-8} < 0.05$ .

✓ Závěr: Zamítneme nulovou hypotézu, že průměrná porodní váha novorozenců v místní spádové nemocnici se neliší od celostátního průměru České republiky, ve prospěch  $H_1$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

#### IV. Jednovýběrový t-test při neznámé hodnotě $\sigma$

✓ Pokračujeme v našem příkladě o porodní váze novorozenců v České republice, ve kterém jsme uvedli, že průměrná porodní váha novorozenců v ČR má hodnotu  $\mu_0 = 3.2$  kg. Předpokládáme ovšem, že směrodatná odchylka není známa, což je v praxi nejčastější případ. Hodnota  $\sigma$  musí tedy být odhadována z dat pomocí výběrové směrodatné odchylky  $s$  a modifikovaná testová statistika vede v tomto případě na studentovo t-rozdělení.

✓ Předpokládáme tedy, že data získaná z místní spádové nemocnice ukazují, že průměrná porodní váha 100 novorozenců zde narozených v průběhu posledních tří let má hodnotu 2.8 kg a odhad směrodatné odchylky  $\sigma$  má hodnotu  $s = 0.85$  kg.

---

---

---

---

---

---

---

---

#### IV. Jednovýběrový t-test při neznámé hodnotě $\sigma$

**Motivace:** testujeme hypotézu, že průměrná porodní váha novorozenců narozených v místní spádové nemocnici v průběhu posledních tří let nižší než hodnota dlouhodobého republikového průměru.

✓  $H_0: \mu = \mu_0$ , přičemž  $\sigma$  odhadujeme pomocí  $s$ .

✓  $H_1: \mu < \mu_0$ , přičemž  $\sigma$  odhadujeme pomocí  $s$ .

✓ Zvolme hladinu významnosti  $\alpha$

✓ Testová statistika:  $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} | H_0$

✓ Testové kritérium: zamítneme nulovou hypotézu na hladině  $\alpha$  v případě, že platí  $t < t_{n-1}(\alpha)$ , nebo ekvivalentně v případě, že dosažená hladina významnosti jednostranného testu bude menší než  $\alpha$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

#### III. Jednovýběrový t-test při neznámé hodnotě $\sigma$

Provedení testu:

✓  $H_0: \mu = 3.2$ , přičemž odhad  $\sigma$  má hodnotu  $s = 0.85$ .

✓  $H_1: \mu < 3.2$ , přičemž odhad  $\sigma$  má hodnotu  $s = 0.85$ .

✓ Hladina významnosti  $\alpha = 5\%$ .

✓ Testová statistika:  $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{2.8 - 3.2}{0.85/\sqrt{100}} = -4.706 \sim t_{99}$

✓ Testové kritérium:  $-4.706 < t_{99}(0.05) = -1.66$

Alternativně, dosažená hladina významnosti má na základě t-rozdělení hodnotu  $p = 4.1 \cdot 10^{-6} < 0.05$ .

✓ **Závěr:** Zamítáme nulovou hypotézu, že průměrná porodní váha novorozenců v místní spádové nemocnici se neliší od celostátního průměru České republiky, ve prospěch  $H_1$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

### V. Dvouvýběrové testy

✓ Předpokládejme nyní, že jsme získali data o porodní váze novorozenců ze dvou různých spádových nemocnic, přičemž odhady směrodatných odchylek naznačují odlišnou variabilitu v obou souborech.

✓ V případě, že hodnoty  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  nejsou známy, vede problém porovnání průměrných hodnot porodních vah novorozenců narozených v těchto dvou nemocnicích k tzv. dvouvýběrovému t-testu. Kdyby hodnoty  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  známy byly, mohli bychom opět použít z-test založený na normálním rozdělení rozdílů průměrných hodnot  $x_1$  a  $x_2$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

### V. Dvouvýběrové testy

a) Dvouvýběrový z-test při známých hodnotách  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$ :

Při známých hodnotách  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  má testová statistika normální rozdělení:

$$z = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N\left(m_1 - m_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

b) Dvouvýběrový t-test při neznámých hodnotách  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$ :

$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = t_d$  přičemž testová statistika t má na základě Satterthwaitovy aproximace počet stupňů volnosti d' roven přibližně:

$$d' = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{(s_1^2/n_1)^2/(n_1-1) + (s_2^2/n_2)^2/(n_2-1)}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### V. Dvouvýběrový t-test při neznámých hodnotách $\sigma_1$ a $\sigma_2$

**Motivace:** testujeme hypotézu rovnosti průměrných porodních vah novorozenců narozených ve dvou různých spádových nemocnicích v průběhu let 2001-2003.

✓  $H_0: \mu_1 = \mu_2$ , přičemž  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ .

✓  $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ , přičemž  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ .

✓ Zvolme hladinu významnosti  $\alpha$

✓ Testová statistika:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = t_d, \quad d' = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{(s_1^2/n_1)^2/(n_1-1) + (s_2^2/n_2)^2/(n_2-1)}$$

✓ Testové kritérium: zamítne nulovou hypotézu na hladině  $\alpha$  v případě, že platí:  $|t| > t_{\alpha/2}(d')$ , nebo ekvivalentně v případě, že dosažená hladina významnosti oboustranného testu bude menší než  $\alpha$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

V. Dvouvýběrový  $t$ -test při neznámých hodnotách  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$

**Provedení:** předpokládáme, že údaje o porodních vahách z obou nemocnic jsou následující:

$$\bar{x}_1 = 2.8, s_1 = 0.85, n_1 = 75, \bar{x}_2 = 3.2, s_2 = 0.6, n_2 = 60$$

- ✓  $H_0: \mu_1 = \mu_2$ , přičemž  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ .
- ✓  $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ , přičemž  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ .
- ✓ Zvolme hladinu významnosti  $\alpha = 0.05$

✓ **Testová statistika:**  $t = \frac{2.8 - 3.2}{\sqrt{\frac{0.85^2}{75} + \frac{0.6^2}{60}}} = -3.20$ ,  $d = \frac{(85 \cdot 75 + 60 \cdot 60)}{(85 \cdot 75) + (75 + 60) \cdot 75} = 131.1$

✓ **Závěr:** Vzhledem k tomu, že  $t = -3.20 > t_{\alpha/2}(0.975) = 1.978$ , zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 5%. Podobně dosažená hladina významnosti oboustranného testu má  $p$ -hodnotu  $0.00172 < 0.05$ , takže i na základě tohoto kritéria zamítáme  $H_0$  o shodnosti středních hodnot.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

VI. Párový  $t$ -test

✓ **Motivace:** Je všeobecně známo, že používání orální antikoncepce (OA) je u žen obecně doprovázeno snížením jejich tělesné hmotnosti. V důsledku známé souvislosti mezi tělesnou hmotností a krevním tlakem bychom dále mohli například usuzovat, že ženy, které používají OA mají v průměru také nižší hodnoty systolického krevního tlaku.

✓ **Hodnocení velikosti změn (diferencí  $d_i$ )** hodnot spojitě náhodné veličiny, jakou je např. systolický krevní tlak, u týchž subjektů v různých experimentálních podmínkách provádíme obecně pomocí párového  $t$ -testu. Tato situace vede opět k jednovýběrovému  $t$ -testu aplikovanému na hodnoty rozdílů sledované náhodné veličiny. I zde je třeba mít na paměti, že požadujeme normalitu, v tomto případě normalitu rozdílů. Ta je ovšem často splněna i v případech, kdy původní veličina předpoklad normálního rozdělení striktně nespĺňuje.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

VI. Párový  $t$ -test

- ✓  $H_0: d = 0$ , přičemž  $\sigma_d$  odhadujeme pomocí  $s_d$ .
- ✓  $H_1: d \neq 0$ , přičemž  $\sigma_d$  odhadujeme pomocí  $s_d$ .
- ✓ Zvolme hladinu významnosti  $\alpha$  (např. 0.05)
- ✓ Označme  $d = \sum_{i=1}^n d_i / n$  průměrnou hodnotu rozdílů  $d_i$

✓ **Testová statistika:**  $t = \frac{\bar{d} - 0}{s_d / \sqrt{n}} \sim t_{n-1} | H_0$

✓ **Testové kritérium:** zamítáme nulovou hypotézu na hladině  $\alpha$  v případě, že platí:  $|t| > t_{\alpha/2}(n-1)$ , resp. ekvivalentně v případě, že dosažená hladina významnosti jednostranného testu bude menší než  $\alpha$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### VI. Párový t-test

ID	STK (OA-)	STK (OA+)	d
1	115	128	13
2	112	115	3
3	107	106	-1
4	119	128	9
5	115	122	7
6	138	145	7
7	126	132	6
8	105	109	4
9	104	102	-2
10	115	117	2

▼ **Příklad:**

Souvislost používání orální antikoncepce (OA) a průměrné hodnoty systolického krevního tlaku

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### VI. Párový t-test

▼ **Příklad – řešení v R:**

```
x <- c(115,112,107,119,115,138,126,105,104,115)
```

```
y <- c(128,115,106,128,122,145,132,109,102,117)
```

```
> t.test(y,x,paired=TRUE)
```

Paired t-test

data: y and x

t = 3.3247, df = 9, p-value = 0.008874

alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0

95 percent confidence interval:

1.533987 8.066013

sample estimates:

mean of the differences

4.8

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---