Neparametrické metody

© EuroMISE Centrum

Obecné informace

Kontakt:

EuroMISE centrum
Doc. Zdeněk Valenta, Ph.D.
Tel.: 266 053 640 (sekretariát)
Fax: 286 581 453
http://www.euromise.cz
valenta@euromise.cz

Literatura:

Zvárová, J.: *Základy statistiky pro biomedicínské obory I. Vydavatelství Karolinum, UK Praha 2001*

Zvára, K.: *Biostatistika. Vydavatelství Karolinum, UK Praha 2001*

Rosner, B.: *Fundamentals of Biostatistics, 4th Edition*

I. ÚVOD

- Neparametrické testy jsou založeny na *pořadových skórech*, které reprezentují původní data
- Data nemusí nutně splňovat určité předpoklady vyžadované u parametrických testů (např. *normalita rozdílů* v párovém *t*-testu)
- Neparametrické metody mohou zahrnovat požadavky na určité vlastnosti rozdělení (např. *symetrie* nebo *spojitost*)
- Jsou mnohdy jedinou alternativou analýzy *ordinálních* dat nebo dat ve formě *četností* či *pořadí*

ÚVOD (pokr.)

- TŘÍDY NEPARAMETRICKÝCH TESTŮ:
  - JEDNOVÝBĚROVÉ: Kvantilový test
  - DVOUVÝBĚROVÉ PÁROVÉ: Znaménkový test, Wilcoxonův párový test (signed-rank test). Oba testy jsou neparametrickou alternativou párového *t*-testu.
  - DVOUVÝBĚROVÉ PRO NEZÁVISLÉ VÝBĚRY: Mediánový test, Wilcoxonův dvouvýběrový test (Mannův-Whitneyův U test, Wilcoxon Rank-Sum test), Robustní dvouvýběrový test, Kolmogorovův-Smirnovův dvouvýběrový test, případně Waldův-Wolfowitzův „runs test“. Tyto testy jsou neparametrickou alternativou dvouvýběrového *t*-testu.
  - VÍCEVÝBĚROVÉ: Kruskalova-Wallisova analýza pořadových skórů jednoduchého třídění, Friedmanova analýza pořadových skórů opakovaných měření v jednoduchém třídění. Tyto analýzy odpovídají analýze rozptylu (ANOVA - analysis of variance, MANOVA - multivariate ANOVA) jednoduchého třídění.

ÚVOD (pokr.)

- Výše uvedené testy jsou analogií známých parametrických testů, tj. jednovýběrového *t*-testu, dvouvýběrového *t*-testu pro nezávislé výběry a analýzy rozptylu
- Neparametrické testy nemusí vyžadovat splnění všech požadavků známých z parametrických metod, jakými jsou například normalita rozdělení, případně ani shodnost rozptylů u dvouvýběrových testů (např. robustní dvouvýběrový test)
- V případě, že jsou ovšem požadavky na použití parametrických metod splněny, je vhodné je upřednostnit před metodami neparametrickými, neboť testy založené na parametrických metodách mají zpravidla větší sílu (využívají více informace)

POŘADÍ SHODNÝCH POZOROVÁNÍ (ties)

- V případě shodných pozorování (ties) přiřazujeme tzv. průměrná pořadí (average ranks).
- Vzestupně uspořádaná data a jejich průměrná pořadí:

Uspořádaná Data	-3	0	1	1	2	3	3	3	4	8	10	10
Průměrná pořadí	1	2	3,5	3,5	5	7	7	7	9	10	11,5	11,5

II. USPOŘÁDÁNÍ A POŘADÍ

- Pozorovaná data:

  -3, 3, 4, 1, 0, 10, 8, 2
- Vzestupně uspořádaná data:

  -3, 0, 1, 2, 3, 4, 8, 10
- Pořadí R_i pozorovaných dat (Ranks R_i):

  1, 5, 6, 3, 2, 8, 7, 4

III. VÝBĚROVÉ KVANTILY SPOJITÝCH ROZDĚLENÍ

- Vzestupně uspořádaná data:

  -3, 0, 1, 2, 3, 4, 8, 10
- Výběrové kvantily:

-3	….	0% kvantil (min)
0	….	1/7 = 14,3% kvantil
1	….	2/7 = 28,6% kvantil
….	….	
4	….	5/7 = 71,5% kvantil
10	….	100% kvantil (max)

ODHADY KVANTILŮ SPOJITÝCH ROZDĚLENÍ

- Vzestupně uspořádaná data:

-3, 0, 1, 2, 3, 4, 8, 10

- Odhady kvantilů (lineární interpolace):

0% kvantil (min)		= - 3,00
10% kvantil	= -3 + (0- -3)*(10/14.3)	= - 0,90
25% (1.kvartil, Q1)	= 0 + (1-0)*(10.7/14.3)	= 0,75
50% (medián):		= 2,50
75% (3. kvartil, Q3)		= 5,00
90% kvantil		= 8,60
100% kvantil (max)		= 10,00

IV. KVANTILOVÝ TEST (1-výběrový)

- Nulová hypotéza: H_0: $x_q = c$
  (H_0:100*q% kvantil x_q cílové populace je roven c)
- Alternativní hypotéza: H_1: $x_q \neq c$
- Hladina významnosti: α (např. 0,05)
- Postup: Z náhodného výběru vyřadíme členy, u kterých je hodnota znaku *x* rovna konstantě *c.* Ve výsledném souboru o rozsahu *n* pak zjistíme počet členů *m,* u kterých je *x* < *c.*
- Testová statistika: $Z = \frac{m - nq}{\sqrt{nq(1-q)}} \sim N(0,1)$

  má za platnosti H_0 standardní normální rozdělení N(0,1).
- Testové kritérium: Zamítáme H_0, jestliže $|Z| \geq z_{1-\alpha/2}$
- Předpoklady: n > 35, 0,10 < q < 0,90 a spojitost rozdělení (aprox. binomického rozdělení normálním rozdělením N(0,1))

KVANTILOVÝ TEST – příklad:

- ZADÁNÍ: Na základě dat o intervenční léčbě 400 pacientů se závažnou formou hyperlipoproteinemie (sérum CHOL 10 mmol/l a více) testujte na hladině významnosti α = 0,05 hypotézu, že u alespoň 20% pacientů s touto závažnou formou hyperlipoproteinémie docílí intervenční léčba poklesu hladiny CHOL v séru většího než 3 mmol/l.
- H_0: $(y - x)_{0.80} = d_{0.80} = 3$ (léčba nedosahuje stanoveného poklesu u alespoň 20% pacientů)
- H_1: $d_{0.80} > 3$ (pokles u alespoň 20% pacientů)
- HLADINA VÝZNAMNOSTI: α = 0,05

KVANTILOVÝ TEST – pokr. př.:

- ŘEŠENÍ: Předpokládejme, že data ukazují, že ve 100 případech ze 400 byla hodnota d > 3 a ani v jednom případě nebylo d = 3.

  Tedy: n = 400 (počet případů kde d ≠ 3)
  m = 100 (počet případů kde d > 3)
  q = 0,20.
- TESTOVÁ STATISTIKA: $Z = \frac{m - nq}{\sqrt{nq(1-q)}} = \frac{100 - 400 * 0{,}2}{\sqrt{400 * 0{,}2 * 0{,}8}} = 2{,}5$
- VÝSLEDEK: Kritická hodnota normálního rozdělení pro jednostranný test na hladině významnosti α = 5% má hodnotu 1,645. Protože hodnota testové statistiky Z = 2,5 přesahuje kritickou hodnotu, zamítáme nulovou hypotézu H_0 na hladině významnosti 5%.
- ZÁVĚR: Na hladině α = 0,05 zamítáme nulovou hypotézu H_0, že intervenční léčba nedosahuje stanoveného poklesu hladiny CHOL o více než 3 mmol/l u alespoň 20% pacientů.

V. ZNAMÉNKOVÝ TEST (párový)

- **v** NULOVÁ HYPOTÉZA: H_0: $(x - y)_{0,5} = d_{0,5} = 0$
  (H_0: Medián párových rozdílů $d_{0,5}$ je roven 0)
- **v** ALTERNATIVNÍ HYPOTÉZA: H_1: $d_{0,5} \neq 0$
- **v** HLADINA VÝZNAMNOSTI: α (např. 0,05)
- **v** POZNÁMKA: Znaménkový test je speciálním případem kvantilového testu pro medián (tj. $q = 0{,}5$) aplikovaného na párové rozdíly hodnot mezi dvěma výběry.
- **v** POSTUP: Ze základního souboru párových rozdílů vyřadíme členy, u kterých je hodnota znaku $d = x - y$ rovna 0. Ve výsledném souboru o rozsahu n (počet párů) pak zjistíme počet členů C, u kterých je $d > 0$.

ZNAMÉNKOVÝ TEST – příklad

- **v** DERMATOLOGIE:

Byla realizována studie zaměřená na porovnání účinnosti pleťových krémů typu A, B a C s ochranným faktorem proti negativním účinkům slunečního záření při dlouhodobé expozici. Krémy byly aplikovány účastníkům studie na odpovídající místa s podobnou kvalitou pokožky na levé a pravé části těla a každý z účastníků byl následně vystaven intenzivnímu slunečnímu záření po dobu 1 hod. Poté bylo dermatologem porovnáno zrudnutí pokožky na ošetřených místech.

V. ZNAMÉNKOVÝ TEST (párový, pokr.)

- **v** TEST H_0 (aproximace binomického rozdělení normálním):

  Zamítneme H_0, jestliže:

  $$C > \frac{n}{2} + \frac{1}{2} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{n}{4}} \quad \text{nebo} \quad C < \frac{n}{2} - \frac{1}{2} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{n}{4}}$$

- **v** PŘEDPOKLADY: Počet dvojic $n \geq 20$ a spojitost rozdělení
- **v** TEST H_0 (exaktní stanovení hladiny významnosti p na základě binomického rozdělení):

  $$\text{(a) Je - li } C > \frac{n}{2} \rightarrow p = 2 * \sum_{j=C}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

  $$\text{(b) Je - li } C < \frac{n}{2} \rightarrow p = 2 * \sum_{j=0}^{C} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ZNAMÉNKOVÝ TEST – příklad

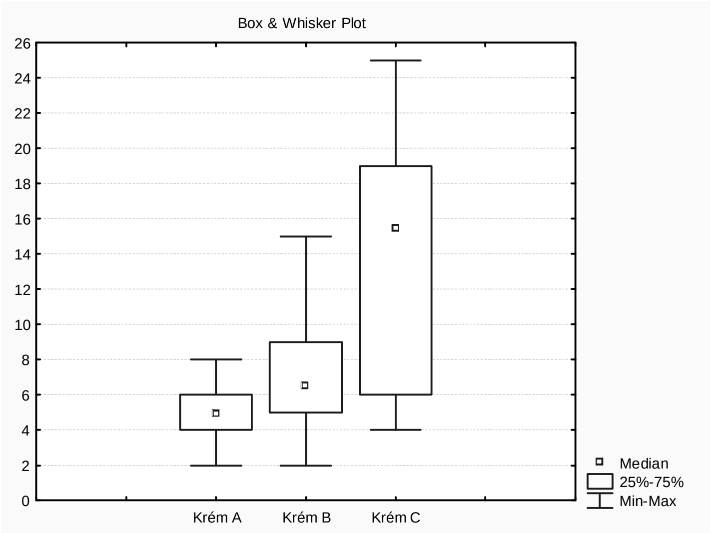
- **v** Organizace dat:

	1 Krém A	2 Krém B	3 Krém C
1	5	6	15
2	6	8	16
3	4	4	4
4	5	7	8
5	5	9	6
6	4	6	22
7	8	12	25
8	8	15	16
9	2	5	19
10	3	2	6

Původní data hodnotila zrudnutí pokožky koeficientem 0 až 25.

ZNAMÉNKOVÝ TEST – příklad

- DATA: Box & Whisker Plot



ZNAMÉNKOVÝ TEST (pokr. př.)

STATISTICA 6.0:

Pair of Variables	Sign Test (sign-test-small.sta) Marked tests are significant at p <,05000 No. of Non-ties	Percent v < V	Z	p-level
Krém A & Krém C	9	100,0000	2,666667	0,007661

Pair of Variables	Sign Test (sign-test-small.sta) Marked tests are significant at p <,05000 No. of Non-ties	Percent v < V	Z	p-level
Krém A & Krém B	9	88,88889	2,000000	0,045500

Pair of Variables	Sign Test (sign-test-small.sta) Marked tests are significant at p <,05000 No. of Non-ties	Percent v < V	Z	p-level
Krém B & Krém C	9	88,88889	2,000000	0,045500

ZNAMÉNKOVÝ TEST (pokr. př.)

- Soustřeďme se nyní pouze na porovnání účinnosti jednotlivých dvojic krémů typu A, B a C. Navíc předpokládejme, že dermatolog byl schopen rozlišit pouze následující případy (zde porovnáváme např. krémy typu A a B):

  1. Místo A je lépe ochráněné než místo B (menší zrudnutí při aplikaci krému A)
  2. Místo B je lépe ochráněné než místo A (menší zrudnutí při aplikaci krému B)
  3. Obě místa vykazují podobný stupeň zrudnutí pokožky

- Tato situace je vhodná pro využití znaménkového testu, neboť původní hodnoty koeficientů zrudnutí pokožky v tomto případě nejsou dostupné, pouze počty případů, kdy pro $d = x - y$ platí: $d < 0$, $d = 0$ a $d > 0$.

ZNAMÉNKOVÝ TEST (pokr. př.)

- Rozsah náhodného výběru byl však v každé skupině (tj, pro každý typ ochranného krému) pouze 10, což nesplňuje požadavek na aproximaci binomického rozdělení standardním normálním rozdělením. V takovém případě je nutné použít exaktní test – binomický test.

- Buď C_{AB} počet subjektů, u nichž je $d = x - y > 0$ při porovnávání účinku krémů A a B. Je-li C_{AB} velké číslo blízké n, pak krém B chrání pokožku většiny studovaných subjektů lépe než krém A, zatímco je-li C_{AB} malé, pak krém typu A vykazuje na souboru studovaných subjektů lepší výsledky než krém typu B.

ZNAMÉNKOVÝ TEST (pokr. př.)

- Za platnosti nulové hypotézy H_0 (tj. předpokladu stejné efektivity krémů A a B) lze předpokládat, že Pr(d > 0) = Pr(d < 0) je u subjektů s nenulovou hodnotou d stejná, tedy ½. Jinými slovy, jsou-li oba krémy stejně efektivní, potom frekvence případů, kdy A je „lepší“ než B a případů, kdy A je „horší“ než B by měly být zhruba stejné.

- Ke stanovení DOSAŽENÉ HLADINY VÝZNAMNOSTI *p* znaménkového testu tedy můžeme využít přímo formule binomického rozdělení:

$$p = \quad 2 * \sum_{j=C_{AB}}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

ZNAMÉNKOVÝ TEST (dokončení)

- EXAKTNÍ ZNAMÉNKOVÝ TEST:

  Připoměňme si, že při porovnávání účinnosti krému A a B jsme měli 10 pozorování, 1 shodu („tie“), $C_{AB} = 1$, $n = 9$. Pro exaktní výpočet dosažené hladiny významnosti oboustraného testu tedy platí:

$$p = 2 * \sum_{j=0}^{1} \binom{9}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{9} = 2*(1+9)*\left(\frac{1}{2}\right)^{9} = 10*\left(\frac{1}{2}\right)^{8} = 0{,}03906$$

- ZÁVĚR:

  Na hladině významnosti α = 5% zamítáme nulovou hypotézu H_0 o shodnosti účinku ochranných krémů typu A a B.

VI. WILCOXONŮV PÁROVÝ TEST (signed-rank test)

- NULOVÁ HYPOTÉZA: H_0: $(x – y)_{0,5} = d_{0,5} = 0$
  (H_0: Medián párových rozdílů $d_{0,5} = 0$)

- ALTERNATIVNÍ HYPOTÉZA: H_1: $d_{0,5} \neq 0$

- HLADINA VÝZNAMNOSTI: α (např. 0,05)

- POSTUP: Z náhodného výběru s počtem párových pozorování n vyřadíme členy, u nichž je hodnota znaku d = x - y rovna 0. Stanovíme pořadí hodnot |d| a zjistíme součet pořadí T^+, která odpovídají kladným hodnotám d.

VI. WILCOXONŮV PÁROVÝ TEST (signed-rank test, pokr.)

- TESTOVÁ STATISTIKA: $Z = \dfrac{T^+ - n(n+1)/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}} \sim N(0{,}1)$

  má za platnosti H_0 standardní normální rozdělení

- POZNÁMKA: Wilcoxonův párový test má větší statistickou sílu než znaménkový test, neboť využívá jak informaci o směru rozdílů, tak o jejich velikosti ve formě pořadí. To se projevuje také v nižším požadovaném minimálním rozsahu náhodného výběru.

- TESTOVÉ KRITÉRIUM: Zamítáme H_0, jestliže $|Z| \geq z_{1-\alpha/2}$

- PŘEDPOKLADY: počet párů n > 15 a spojitost rozdělení

WILCOXONŮV PÁROVÝ TEST - příklad

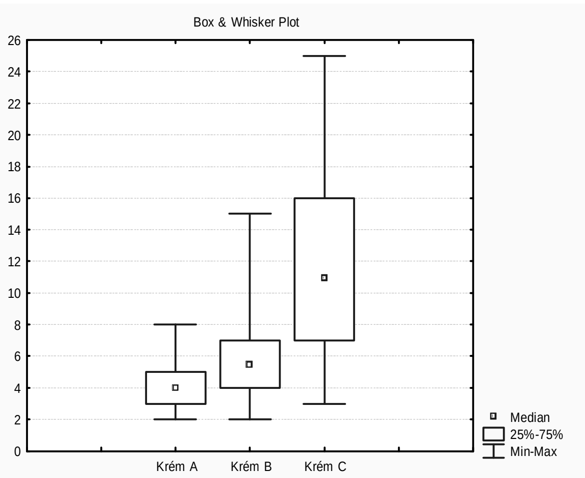
- Pokračujme naším příkladem z dermatologie: připomeňme, že Wilcoxonův *signed-rank test* pracuje s aktuální velikostí rozdílů d = x – y, nikoliv pouze s informací, zda x je větší či menší než y. Můžeme tedy očekávat, že reálně existující rozdíly mezi efektivností krémů bude snazší detekovat na základě Wilcoxonova párového testu než jednoduššího testu znaménkového.

WILCOXONŮV PÁROVÝ TEST - příklad

- Organizace dat:

	1 Krém A	2 Krém B	3 Krém C
1	5	6	15
2	6	8	16
3	4	4	4
4	5	7	8
5	5	9	6
6	4	6	22
7	8	12	25
8	8	15	16
9	2	5	19
10	3	2	6
11	2	3	13
12	3	4	10
13	5	5	5
14	3	4	8
15	6	7	8
16	4	6	15
17	2	6	9
18	3	4	12
19	4	3	3
20	4	5	20

- Box and Whisker plot:



WILCOXONŮV PÁROVÝ TEST – (pokr. př.):

Krém A vs B:

Pair of Variables	Wilcoxon Matched Pairs Test (sign-test.sta) Marked tests are significant at p <,05000 Valid N	T	Z	p-level
Kr ém A & Krém B	20	10,00000	3,288052	0,001009

Srovnej:

Pair of Variables	Sign Test (sign-test.sta) Marked tests are significant at p <,05000 No. of Non-ties	Percent v < V	Z	p-level
Krém A & Krém B	18	88,88889	3,064129	0,002183

WILCOXONŮV PÁROVÝ TEST – (pokr. př.):

Krém A vs C:

Pair of Variables	Wilcoxon Matched Pairs Test (sign-test.sta) Marked tests are significant at p <,05000 Valid N	T	Z	p-level
Kr ém A & Krém C	20	1,500000	3,658230	0,000254

Srovnej:

Pair of Variables	Sign Test (sign-test.sta) Marked tests are significant at p <,05000 No. of Non-ties	Percent v < V	Z	p-level
Krém A & Krém C	18	94,44444	3,535534	0,000407

WILCOXONŮV PÁROVÝ TEST – (pokr. př.):

Krém B vs C:

Pair of Variables	Wilcoxon Matched Pairs Test (sign-test.sta) Marked tests are significant at p <,05000			
	Valid N	T	Z	p-level
Krém B & Krém C	20	4,500000	3,408344	0,000654

Srovnej:

Pair of Variables	Sign Test (sign-test.sta) Marked tests are significant at p <,05000			
	No. of Non-ties	Percent v < V	Z	p-level
Krém B & Krém C	17	94,11765	3,395499	0,000685

MEDIÁNOVÝ TEST (dvouvýběrový, pokr.)

- VARIANTY TESTU:
  - exaktní na základě hypergeometrického rozdělení: (Fisherův test, n≤20)

$$P[a,b] = \frac{\binom{a+c}{a}\binom{b+d}{b}}{\binom{n}{a+b}}$$

  - Chí-kvadrát aproximace (n>20):

$$X^2(1) = \frac{n(|ad-bc|-n/2)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$$

- PŘEDPOKLADY: spojitost a shodný tvar rozdělení X a Y.

VII. MEDIÁNOVÝ TEST (dvouvýběrový)

- NULOVÁ HYPOTÉZA: H_0: $\Theta_X = \Theta_Y$ (H_0: Mediány Θ_X a Θ_Y jsou shodné)
- ALTERNATIVNÍ HYPOTÉZA: H_1: $\Theta_X > \Theta_Y$ (medián Θ_X je napravo od Θ_Y)
- HLADINA VÝZNAMNOSTI: α (např. 0,05)
- POSTUP: Klasifikace hodnot v obou souborech podle společného mediánu Θ_{XY}:

Klasifikace	Soubor X	Soubor Y	Celkem
Počet hodnot > Θ_{XY}	a	b	a+b
Počet hodnot < Θ_{XY}	c	d	c+d
Celkem	a+c	b+d	n

VIII. WILCOXONŮV DVOUVÝBĚROVÝ TEST (Mann-Whitney U test, Rank-Sum test)

- NULOVÁ HYPOTÉZA: H_0: Dva nezávislé výběry pocházejí z populací se shodnými mediány ($\Theta_X = \Theta_Y$)
- ALTERNATIVNÍ HYPOTÉZA: H_1: Populace X je „napravo“ od Y (medián $\Theta_X > \Theta_Y$)
- HLADINA VÝZNAMNOSTI: α (např. 0,05)
- POSTUP: Stanovíme pořadí hodnot v souboru vzniklém spojením výběrů X a Y a zjistíme součty pořadí W_X a W_Y („ranked sums“) odpovídající výběrům X, Y. Za platnosti H_0 by statistiky W_X a W_y měly mít přibližně stejnou hodnotu.

WILCOXONŮV DVOUVÝBĚROVÝ TEST (pokr.)

- TESTOVÁ STATISTIKA:

  $$Z = \frac{W_X + 0.5 - m(m+n+1)/2}{\sqrt{mn(m+n+1)/12}} \sim N(0,1)$$

  má za platnosti H_0 standardní normální rozdělení N(0,1), přičemž m a n jsou rozsahy jednotlivých výběrů.

- POZNÁMKA: V případě, že H_1 má tvar $\Theta_X < \Theta_Y$ má hodnota 0,5 v čitateli záporné znaménko. Wilcoxonův dvouvýběrový test má větší statistickou sílu než mediánový test, neboť využívá jak informaci o poloze skórů vůči společnému mediánu, tak také součty pořadí.

WILCOXONŮV DVOUVÝBĚROVÝ TEST - příklad

- Pokračujme opět naším příkladem z dermatologie; pouze nyní předpokládejme, že data nevznikla párovým porovnáváním na týchž subjektech, nýbrž že každému z účastníků studie byl aplikován právě jediný z ochranných krémů typu A, B, C.

- Z tohoto důvodu budou mít data namísto 20 záznamů (records) se třemi proměnnými A, B, C mít záznamů 60 a pouze dvě proměnné, přičemž první proměnná udává hodnotu zjištěného koeficientu a druhá je indikátorem, udávajícím typ použitého krému u daného subjektu.

WILCOXONŮV DVOUVÝBĚROVÝ TEST (dok.)

- TESTOVÉ KRITÉIUM: Zamítáme H_0, jestliže $Z \geq z_{1-\alpha}$

- PŘEDPOKLADY: m > 10, n > 10 a spojitost a shodný tvar rozdělení v obou populacích

WILCOXONŮV DVOUVÝBĚROVÝ TEST - příklad

- Organizace dat v programu *Statistica 6* v tomto případě vypadá následovně:

	1 Krém	2 Group
1	5	1
2	6	1
3	4	1
4	5	1
5	5	1
6	4	1
7	8	1
8	8	1
9	2	1
10	3	1
11	2	1
12	3	1
13	5	1
14	3	1
15	6	1
16	4	1
17	2	1
18	3	1
19	4	1
20	4	1
21	6	2
22	8	2
23	4	2
24	7	2
25	9	2
26	6	2
27	12	2
28	15	2
29	5	2
30	2	2
31	3	2

WILCOXONŮV DVOUVÝBĚROVÝ TEST - pokr. př.

Mann-Whitney U Test (Wilcoxon Rank Sum Test.sta)
By variable Group
Marked tests are significant at p <,05000

variable	Rank Sum Group 1	Rank Sum Group 2	U	Z	p-level	Z adjusted	p-level	Valid N Group 1	Valid N Group 2	2*1sided exact p
Krém	335,5000	484,5000	125,5000	-2,01523	0,043881	-2,04036	0,041315	20	20	0,04298

Poznámky k dvouvýběrovým testům:

- Ukázka výpočtu „runs“ ve WALDOVĚ-WOLFOWITZOVĚ testu na příkladě:

pořadí 1 2 3 31
data MMMZZZMMMMZZMMMZZZZZZZMMZMMZZZZ
run 111 222 3333 44 555 6666666 77 8 99 0000

DALŠÍ DVOUVÝBĚROVÉ TESTY:

- KOLMOGOROVŮV-SMIRNOVŮV test:

Kolmogorov-Smirnov Test (Wilcoxon Rank Sum Test.sta)
By variable Group
Marked tests are significant at p <,05000

variable	Max Neg Differnc	Max Pos Differnc	p-level	Mean Group 1	Mean Group 2	Std.Dev. Group 1	Std.Dev. Group 2	Valid N Group 1	Valid N Group 2
Kr ém	-0,300000	0,00	p > .10	4,300000	6,050000	1,750188	3,119970	20	20

- WALDŮV-WOLFOWITZŮV „runs test“

Wald-Wolfowitz Runs Test (Wilcoxon Rank Sum Test.sta)
By variable Group
Marked tests are significant at p <,05000

Variable	Valid N Group 1	Valid N Group 2	Mean Group 1	Mean Group 2	Z	p-level	Z adjstd	p-level	No. of Runs	No. of ties
Krém	20	20	4,300000	6,050000	0,961085	0,336510	0,800904	0,423188	24	17

Poznámky k dvouvýběrovým testům:

- WILCOXONŮV DVOUVÝBĚROVÝ TEST (Mannův-Whitneyův U-test, Wilcoxonův Rank-Sum test) má největší statistickou sílu z uvedených testů a je vhodný zejména v případě, že počet „ties“ (shodných pozorování) je malý. Je vhodný zejména v situacích, kdy se průměrné hodnoty pořadí v jednotlivých skupinách (např. muži a ženy) podstatně liší.
- WALDŮV-WOLFOWITZŮV „RUNS TEST“ má menší statistickou sílu, ale je vhodný v případě, že průměrné hodnoty pořadí se ve skupinách (muži a ženy) zásadně neliší, ale například u mužů nabývají buď vysokých nebo naopak nízkých hodnot, zatímco u žen nabývají středních hodnot.
- KOLMOGOROVŮV-SMIRNOVŮV test je vhodný v případě, že počet shodných pozorování („ties“) je vyšší.

IX. KRUSKALOVA-WALLISOVA ANOVA

- Nulová hypotéza: H_0: *k* nezávislých výběrů pochází z populací se shodnými mediány ($\Theta_1 = \Theta_2 = ... = \Theta_k$)
- Alternativní hypotéza: H_1: Mediány se alespoň ve dvou populacích vzájemně liší
- Hladina významnosti: α (např. 0,05)

- Postup:

  1. Do tabulky o *k* sloupcích, ve které *j*-tý sloupec odpovídá výběru z *j*-té populace (*j*=1,...,*k*), zapíšeme namísto pozorovaných hodnot pořadí, která odpovídají pozorovaným hodnotám v souboru vzniklém spojením *k* podsouborů.
  2. V každé z *k* skupin spočteme průměrné pořadí $\overline{R}_j$, (j=1,...,k)

KRUSKALOVA-WALLISOVA analýza – příklad:

Opthalmologie:

- Kyselina arachodinová je známá tím, že ovlivňuje metabolismus oka. Kontakt oka s malým množstvím této kyseliny má za následek zavření víčka, svědění a v některých případech poruchy vidění. Studie, z níž pocházejí data pro náš příklad, porovnávala protizánětlivé účinky 4 zkoumaných látek, které byly aplikovány laboratorním zvířatům (bílí králíci) do jednoho oka a roztok salina do druhého oka.

- Po 10 minutách bylo králíkům aplikováno malé množství kyseliny arachodinové na obě bulvy. Po dalších 15 minutách byli králíci kontrolováni, zda došlo k uzavření víčka a bylo zaznamenáno skóre, které představovalo hodnotu rozdílu mezi stupněm otevření víčka (0-otevřené, 1-2 polouzavřené a 3 uzavřené) na začátku pokusu a po aplikaci kyseliny arachodinové.

KRUSKALOVA-WALLISOVA ANOVA (pokr.)

- Testová statistika: $KW = \left[\frac{12}{N(N+1)}\sum_{j=1}^{k} n_j \overline{R}_j^2\right] - 3(N+1)$

  má za platnosti H_0 rozdělení c^2_{k-1}

- Testové kritérium: Zamítáme H_0, jestliže $KW > c^2_{k-1}(1-a)$

- Předpoklady:

  - Rozsahy výběru n_j (j=1,...,k) musí být v jednotlivých skupinách alespoň 5
  - Spojitost
  - Shodný tvar rozdělení v jednotlivých populacích.

KRUSKALOVA-WALLISOVA analýza – pokr. př.:

Opthalmologie:

- Data pro statistickou analýzu udávají míru efektivnosti protizánětlivého přípravku a jsou dána rozdíly mezi hodnotou skóre na oku ošetřeném aktivní látkou a oku ošetřeném salinou (neutrální izotonický 0,9% roztok soli).

- Vyšší hodnoty skórů (rozdíly rozdílů) naznačují efektivnější účinek protizánětlivé látky.

KRUSKALOVA-WALLISOVA analýza – pokr. př.

- Opthalmologie - data:

	1 Skore	2 Lecba
1	2	Indometacin
2	3	Indometacin
3	3	Indometacin
4	3	Indometacin
5	3	Indometacin
6	0	Indometacin
7	1	Aspirin
8	3	Aspirin
9	1	Aspirin
10	2	Aspirin
11	2	Aspirin
12	3	Aspirin
13	3	Piroxicam
14	1	Piroxicam
15	2	Piroxicam
16	1	Piroxicam
17	3	Piroxicam
18	3	Piroxicam
19	1	BW755C
20	0	BW755C
21	0	BW755C
22	0	BW755C
23	0	BW755C
24	-1	BW755C

KRUSKALOVA-WALLISOVA analýza – pokr. př.

- K-W analýza pořadových skórů:

Kruskal-Wallis ANOVA by Ranks;
Independent (grouping) variable: Lecba
Kruskal-Wallis test: H (3, N= 24) =11,80415 p =,0081

Depend.: Skore	Code	Valid N	Sum of Ranks
Indometacin	101	6	97,50000
Aspirin	102	6	85,00000
Piroxicam	103	6	91,50000
BW755C	104	6	26,00000

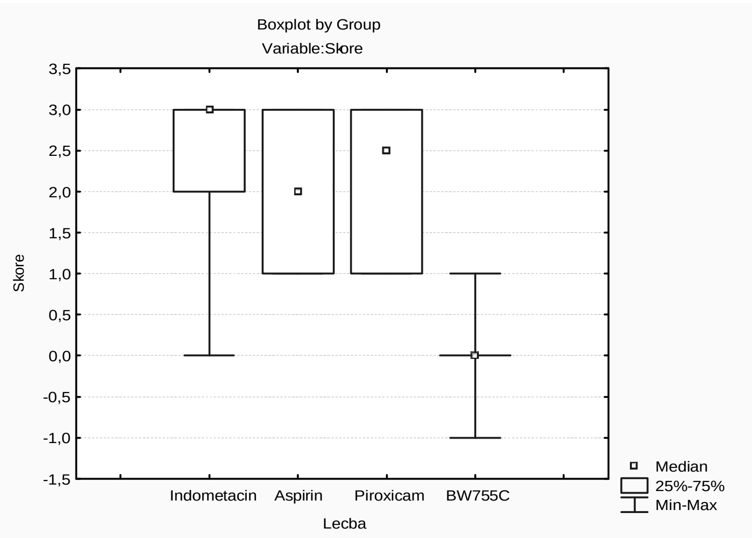
- Mediánový test:

Median Test, Overall Median = 2,00000; Skore (Kruskal-Wallis C
Independent (grouping) variable: Lecba
Chi-Square = 6,222222, df = 3, p = ,1013

Dependent: Skore	Indometacin	Aspirin	Piroxicam	BW755C	Total
<= Median: observed	2,00000	4,000000	3,000000	6,00000	15,00000
expected	3,75000	3,750000	3,750000	3,75000	
obs.-exp.	-1,75000	0,250000	-0,750000	2,25000	
> Median: observed	4,00000	2,000000	3,000000	0,00000	9,00000
expected	2,25000	2,250000	2,250000	2,25000	
obs.-exp.	1,75000	-0,250000	0,750000	-2,25000	
Total: observed	6,00000	6,000000	6,000000	6,00000	24,00000

KRUSKALOVA-WALLISOVA analýza – pokr. př.

- Box & Whisker Plot:



X. ROBUSTNÍ DVOUVÝBĚROVÝ TEST

- NULOVÁ HYPOTÉZA: H_0: Dva nezávislé výběry pocházejí z populací se shodnými mediány ($\Theta_X = \Theta_Y$)
- ALTERNATIVNÍ HYPOTÉZA: H_1: Medián $\Theta_X > \Theta_Y$
- HLADINA VÝZNAMNOSTI: α (např. 0,05)
- POSTUP (na příkladě):

1. Vzestupně uspořádejme pozorovaná data a označme příslušnost ke skupinám X a Y:

Data	6	8	9	10	11	13	15
Skupina	Y	Y	X	Y	X	Y	X

ROBUSTNÍ DVOUVÝBĚROVÝ TEST (pokr.)

Data	6	8	9	10	11	13	15
Skupina	Y	Y	X	Y	X	Y	X

2. Definujeme: $U(YX_i)$ – počet Y menších než X_i
$U(XY_j)$ – počet X menších než Y_j

X_i	9	11	15	Y_j	6	8	10	13
$U(YX_i)$	2	3	4	$U(XY_j)$	0	0	1	2

3. Vypočteme střední hodnoty U(YX) a U(XY):

$$U(YX)=\sum_{i=1}^{m}\frac{U(YX_i)}{m}=\frac{(2+3+4)}{3}=3$$

$$U(XY)=\sum_{i=1}^{n}\frac{U(XY_i)}{n}=\frac{(0+0+1+2)}{4}=0{,}75$$

ROBUSTNÍ DVOUVÝBĚROVÝ TEST - pokr.

X_i	9	11	15	Y_j	6	8	10	13
$U(YX_i)$	2	3	4	$U(XY_j)$	0	0	1	2

Střední hodnoty: U(YX) = 3 U(XY) = 0,75.

4. Vypočteme ukazatele variability V_X a V_Y :

$$V_X=\sum_{i=1}^{m}\left[U(YX_i)-U(YX)\right]^2=$$
$$=(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2$$
$$=1+0+1=2$$

$$V_Y=\sum_{j=1}^{n}\left[U(XY_j)-U(XY)\right]^2=$$
$$=(0-0{,}75)^2+(0-0{,}75)^2$$
$$+(1-0{,}75)^2+(2-0{,}75)^2=2{,}75$$

ROBUSTNÍ DVOUVÝBĚROVÝ TEST - pokr.

- Střední hodnoty: U(YX) = 3 U(XY) = 0,75.
- Ukazatele variability: $V_X = 2$ $V_Y = 2{,}75$.

5. TESTOVÁ STATISTIKA U má za platnosti H_0 rozdělení N(0,1):

$$U=\frac{mU(YX)-nU(XY)}{2\sqrt{V_X+V_Y+U(XY)U(YX)}}=\frac{3(3)-4(0{,}75)}{2\sqrt{2+2{,}75+(0{,}75)(3)}}=1{,}13$$

6. TESTOVÉ KRITÉRIUM: Zamítáme $\mathbf{H_0}$, jestliže platí $U\geq z_{1-\alpha}$.

7. ZÁVĚR: V našem příkladě H_0 nezamítáme.

8. PŘEDPOKLADY: m > 12, n > 12 a spojitost rozdělení (rozptyly se mohou lišit, jde o tzv. Behrensův-Fisherův problém). Pro m,n≤12 je rozdělení U tabelováno.